圓 周 率 的 故 事

張 鎮 華

國 立 臺 灣 大 學 數 學 系

2021 年 4 月

序

這是為高中學生寫的一門選修課的教材，以圓周率為主題。

108 課綱的一大特色是，將高中的四分之一學分留給學校安排選修課，這使得高中的課程架構更像大學。這是第一次嘗試，有許多待學習的地方，例如，課程內容如何設計，學生如何選課，是要固定班級還是跑班等，都須一一解決。

在這些問題中，我認為最關鍵的部分應該是課程內容的設計。高中老師教學鐘點多，要他們再設計新的選修課，真是一大挑戰，或許算是一種苛求。

這本書的目的就是要幫助高中老師，寫一本適合的數學選修課教材。

本書的安排與一般的數學教科書不同，它除了一些數學內容以外，也有些地方以故事呈現，希望能在乾澀的數學內容中，添加一些趣味性。老師也許可以嘗試，讓學生朗讀部分段落，引發興趣。也可以鼓勵學生上網搜尋相關資料，也可於課外閱讀參考文獻。

數學部分的安排，從複習國中數學內容開始，一直到高中生能懂得的數學，夾雜一些大學才能證明的定理，只先拿來用。

本書共有六章。第一章針對圓周率做一般性的介紹，其中有些數學，後面逐次補齊。根數是早期用幾何方法計算圓周率的基本工具，第二章引進根數的概念，並談它的存在性及性質。第三章介紹數列的概念，以備後續使用。第四章介紹早期用幾何方法計算圓周率的方法，主要談阿基米和劉徽的工作。第五章談近代圓周率的算法，主要是用無窮級數逼近圓周率。第六章回到根數相關的配方法，並不是圓周率的題材，想要表達的是高中階段應該更重視配方法教學。

書中安排課堂活動，希望這是師生互動的課程，不要只是老師授課，學生聽講。

為了完整起見，本書列了一些高中生能了解的證明。但如果某些內容對學生還是太難，教師可以斟酌將其省略。

記得要學生隨身攜帶計算機，以備不時之需。老師也可以用數學軟體適時演示。

最後要感謝許多位老師，對於本書初稿提出積極的修改意見。特別要感謝台中一中陳光鴻老師幫忙繪圖。

張鎮華 2021 年 4 月

目錄

第 1 章　圓周率 pi 登場

Pi：「信仰就像一座房屋，可以有很多樓層、很多房間。」
作家：「那有懷疑的空間麼？」
Pi：「當然，每一層樓都有。」
– 李安《少年 Pi 的奇幻漂流》

本章針對圓周率做一般性的介紹，其中有些數學，會在後面的章節逐次補齊。

1.1.　前奏—我的外孫叫小 pi

我很喜歡李安的電影《少年 Pi 的奇幻漂流》，故事雖然有一點沉悶，卻含有許多哲理。我家也有 pi 的故事。

2013 年我家熱烈討論的議題之一是，住在美國德州的大女兒年底要生的外孫的名字。其中討論最熱烈、最難達到共識的是他的中文名字。幾經轉折，最後以「信恆」定案，取其信心與恆心。

而他的英文名字 Andrew（簡稱 Andy），並沒有太多討論。我立刻附議，認為這是個好名字。請看，華人出色的計算機科學家姚期智，就用這個英文名字，當然很佳。

在決定外孫的中、英文名字之前，女兒已經替他取了一個小名，叫做小 pi，後來我們習慣叫他的小名，常常記不起他的真正名字。

小 pi 這個名字是有來由的，這個小傢伙在媽媽肚子裡就很好動，有事沒事就踢媽媽，「踢踢」寫成英文字母就是「TT」，合起來就像希臘字母的 π（大寫字母 Π），參見 [17]。

因為這個緣故，小女兒也替他兒子取了 tau（希臘字母 τ）的名子，大女兒後來又得一千金就叫 mu（希臘字母 μ）。他們三個人嚴然形成了 $\pi\tau\mu$ 兄弟、姐妹會。

課堂活動 1.1. 請同學們說說看，還認得那些希臘字母，它們都怎麼寫？怎麼念？

兄弟會（Fraternities）和姊妹會（Sororities）通常以希臘字母命名，並一起通稱希臘字母社團（Greek Letter Organizations, GLOs）。在拉丁語中，Frater 和 Soror 分別代表「兄弟」（Brother）和「姊妹」（Sister）。

兄弟會是一種以兄弟情誼為基礎，招收在校學生的學生社團組織。在北美，兄弟會一般意指大學中的希臘字母社團，屬於學生社團組織。但在歐洲類似性質的社團法人（Corporation）也適用此稱呼。少數高中也有類似的組織。

共濟會（Freemasonry、意為自由石匠），亦稱美生會、規矩會、福利美森會，是源於英國的一類兄弟會組織，其最早可以追溯到十四世紀末的石匠行業協會。

如果你拿出一元美金紙鈔來看，正面圖案是美國國父喬治 · 華盛頓頭像，背面右側是美國國徽；左側有一個奇怪的圖案「在類似於金字塔的頂端有一隻獨眼」。沒錯！這就是大名鼎鼎的共濟會符號—獨眼金字塔。上面一行拉丁文的意思是「天佑基業」；下面一行拉丁文的意思是「世界新秩序」。

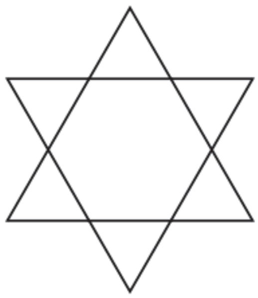


圖 1.1: 六芒星。

共濟會共有五個重要的標誌：一是「規矩」圖標；二是獨眼神和金字塔；三是六芒星（又叫大衛星、猶太星）；四是對稱雙柱（所羅門神殿石柱）；五是棋盤格（共濟會神殿）地板。

有關「共濟會」和「六芒星」亦可以參考《達文西密碼》一書 [12]，及電影《國家寶藏》[13]。

Draft on April 2, 2021

課堂活動 1.2. 圖 1.1 是一顆六芒星。大三角形的邊長是 3，小正三角形的邊長是 1。試求六芒星區域的面積。如果將正六邊形中三條長對角線連起來，交於中心點。試問在新圖形中，共有幾個大小不同的正三角形？

1.2. 幕啟—圓周率 π 正式登場

數學家問：「嗨！我們在進行一項數學計畫，你能告訴我 pi 是甚麼嗎？」

小女孩轉動著倒立的腳踏車車輪，回答：「雖然不是剛好，它大約是 $\frac{22}{7}$。」

另一位男生回答：「我想它是 3.14 這種東西。」

戴眼鏡的男生說：「是不是和圓面積有關？」

另一個人說：「它就是圓的周長。不太確定。是的，它就是圓的周長。」

還有人回答：「pi 是直徑和半徑的比值。等等，這不可能對。」

再有個人說：「pi 是圓的神祕數字。」

最後數學家結論，顯然的，如果你想要研究 pi，不能靠民意調查。不過你卻可以自己做實驗去發現 pi 是多少。

課堂活動 1.3. 請學生們討論數學家的問題：「pi 是甚麼？」

測量一個圓的周長，然後除以其直徑，不管你用什麼形狀的圓，這個比值永遠都是一樣的，這個常數比值就叫做 pi，用希臘字周長的的第一個字母記為 π，這是在 1706 年由威爾斯數學家威廉 · 瓊斯（William Jones，1675 ~ 1749）引入的。它的值介於 3 和 $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ 之間，也就是

$$3 < \pi < \frac{22}{7}。$$

關於圓周率，我們要處理的有兩件事情。

第一件事情是，為何不管圓是小如硬幣、或者大如車輪，其周長和直徑的比都一樣。

第二件事情是，要如何決定 π 的準確值 $3.1415926\cdots$。

到處都可以看到，人們從古至今迷戀於這個數字，當你看到一些圓形的物體，π 都在其中。

舉例來說，看看一個圓盤，它的周長是 $2\pi r$，面積是 πr^2。

在空間中移動圓盤，可以掃出一個圓柱體，它的體積和表面積涉及 π。

旋轉一個直角三角形掃出一個直角錐，一樣地，它的體積和表面積涉及 π。

相同的情況發生在旋轉一個半圓盤，此時掃出一個球體。

如果看看甜甜狀的環面（torus），它的表面積是 $4\pi^2 ra$，而體積是 $2\pi^2 r^2 a$。

課堂活動 1.4. 請四位同學上台，在黑板上分別畫出一個圓柱體、一個直角錐、一個球體、一個環面。

一顆行星繞太陽一周所花的時間公式為 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_0}$。

為何從紐約到東京要繞地球的大圓飛行？

更驚人的是，π 發生在一些和圓不相關的地方。

舉例來說，在彈珠檯上，球隨機掉落在下方的洞，其機率分配函數中呈現一個鐘型曲線，稱為高斯曲線（Gaussian curve）。有些老師用高斯曲線給學生打分數。微積分課堂的學生，計算出這條曲線 $y = e^{-x^2}$ 下的面積是 $\sqrt{\pi}$。

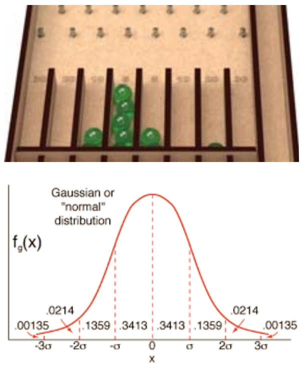


圖 1.2: 高斯曲線。

電子工程師發現交流電與收音機及電視的輻射，其相關公式也涉及 π。

微積分的一些公式裡也顯示 π 和整數的關聯。例如，無窮多個整數的倒數和，涉及 π 及 π^2，下面是兩個有名的例子：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \cdots,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots。$$

也有無窮多個整數比的乘積，涉及 π，下面是兩個有名的例子：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots\cdot ,$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{21}{20}\cdots\cdot 。$$

還有許多涉及 π 的積分公式。

綜合來說，在數學上，從三角函數到高等微積分，你都將遇到 π。

課堂活動 1.5. (1) 與學生討論，看他們了解前述哪些式子。還知道那些式子？
(2) 請四位同學分別用計算機，以及前述的四個公式計算 π（算到列出來的項，或是至少五項），看哪一組算出來的值比較靠近真正的 π 值。

1.3. 第一件事—圓周長和直徑比是常數

在比人類發明輪子更早之前，他們就已經發現圓是一個強有力的符號，它有無限的對稱性，例如在月亮或花朵的形狀上。

為了建造圓形寨子或圓形寺廟，人們需要估計繞一圈的長度，和橫跨距離之間的關係。

早期文明了解，所有圓的周長和直徑的比都一樣，經過小心的測量，他們發現這個比值略大於 3。

《聖經》有 π 的估計，其值等於 3。請見《舊約》(列王紀上 7:23) 他又鑄一個銅海，樣式是圓的，高五肘，徑十肘，圍三十肘。

巴比倫人用的值是 $3\frac{1}{8}$，也就是 3.125。

埃及人的值略微不同，是 256 除以 81，大約為 3.16。

雖然人們知道所有圓的周長比直徑都一樣，希臘人首先解釋，為何這類似於以前看過線型圖形的性質，若將兩個圓看成相似形，直徑和周長都看成「邊」，則對應「邊」長的比值一樣。

如果將某一個圓的圓周展開成直線，和一條直徑垂直地畫出來。然後將此圓放

大某一個倍數，得到另一個圓，由展開圖可以看出來，圓的展開圓周以同樣倍數改變。

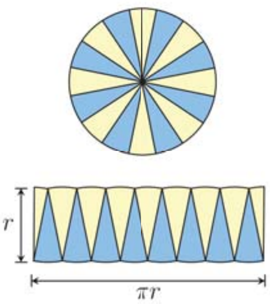
所以，不論是在地球上或是在天上，對於所有圓，圓周和直徑的比值都是一樣的。這個我們稱為 π 的常數，是自然界的一個基本常數，它能讓我們由圓的半徑算出周長，如果圓的半徑是 r，它的周長就是 $2\pi r$。

另一個對所有圓的常數是，圓盤的面積除以半徑的平方。

這可以用類似的方法解釋。同樣地，將圓放大某一個倍數，其面積也會隨著變成那個倍數的平方，所以，所有圓的面積和半徑平方的比也都一樣，這一個比值是自然界的另一個基本常數。

超過 22 個世紀之前，希臘的偉大數學家阿基米德（Archimedes，B.C. 287 ~ 212）有一個令人吃驚的發現，這個新的常數其實就是我們的舊朋友 π。下面我們就會看到為何如此了。

用另一個方式說，半徑是 r 的圓，它的面積是 $r^2\pi$。這個公式在不同文明中，一再被重復發現。



有一種常見的說法如下。將圓盤等分成偶數片，把其中半數排列成齒狀，另一半插入齒間的空隙，形成一個幾乎是平行四邊形的形狀（如右圖），但是面積和原來的圓一樣。當等分的片數越來越多，這個形狀越來越接近高為半徑、底為半周長的長方形，面積慢慢變成 $\pi r \cdot r = r^2\pi$。

另一個解釋的方法如下。將圓盤分成一些等寬的同心環，然後將每一個環拉成一個約等面積的長方形，最長的長方形的長是 $2\pi r$。他們疊成一個鋸齒狀，上短下長的「類直角三角形」。當等分的環數越來越多，這個形狀越來越接近高為半徑、底為周長的直角三角形，面積慢慢變成 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = r^2\pi$。

課堂活動 1.6. 以圖形討論前述同心環分割法，計算圓面積。